Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

ANALYSE II

Equations Différentielles Linéaires

ENSAH
2018/2019

Année 2018-2019
ENSAH - Analyse II
Enseignant : Y. ABOUELHANOUNE

Table des matières

Equations Linéaires Différentielles

Dans tout ce chapitre, on notera par $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et par I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Généralités

1.1.1 Définition 1

• On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type :

$$(\mathrm{e}) \quad \alpha y' + ay = b$$

où α, a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.
• Soit $y : I \longmapsto \mathbb{K}$ une application. on dit que y est solution de (e) si et seulement si :

$$\begin{cases} i) & y \text{ est dérivable sur } I. \\ ii) & \forall x \in I; \quad \alpha(x)y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \end{cases}$$

Le graphe dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'une solution y de (e) est appelé **courbe intégrale de (e)**.

1.1.2 Définition 2

Dans le cas où $\alpha = 1$, l'équation différentielle (e) devient :

$$(\mathrm{L}) : \quad y' + ay = b$$

(L) est dite équation différentielle normalisée (ou de forme résolue).

1.1.3 Définition 3

On appelle équation homogène associée à (L) l'équation sans second membre :

$$(\mathrm{H}) : \quad y' + ay = 0$$

1.2 Résolution de l'équation différentielle homogène (H) : $y' + ay = 0$

La fonction a étant continue sur l'intervalle I, donc elle est intègrable sur I.
Soit donc F une primitive de a sur I (i,e $\forall x \in I$; $F'(x) = a(x)$).
L'équation (H) s'écrit alors :

$$(\mathrm{H}) : \quad y'(x) + F'(x)y(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

Considérons la fonction : $x \longmapsto e^{F(x)}$. Cette fonction ne s'annule pas sur I, donc l'équation (H) est équivalente à :

$$\forall x \in I; \qquad y'(x)e^{F(x)} + F'(x)e^{F(x)}y(x) = 0$$

$$\text{Soit alors :} \qquad \frac{d}{dx}[y(x)e^{F(x)}] = 0$$

$$\text{Donc} \qquad y(x)e^{F(x)} = cte$$
$$y(x) = cte.e^{-F(x)}$$

On déduit le théorème suivant :

1.2.1 Théorème 1

Les solutions de l'équation homogène (H) : $y' + ay = 0$ sont les fonctions $\begin{array}{rl} y: & I \longmapsto \mathbb{K} \\ & x \longmapsto ce^{-F(x)} \end{array}$ où c est une constante et F une primitive de a sur I.

Remarque

Dans la pratique, si on a à intégrer une équation différentielle (H) : $y' + ay = 0$ on écrit :

$$\frac{dy}{dx} = -ay \qquad \text{Soit} \qquad \frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

en intégrant on obtient $\quad ln|y(x)| = -\int a(x)dx + K \quad$ Soit $\quad |y(x)| = e^{-\int a(x)dx+K}$

$$y(x) = ce^{-\int a(x)dx+K}$$

N.B cette présentation n'est pas valable si a est complexe ou admet des discontinuités.

1.2.2 Théorème 2

Notons par $S(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) : $y' + ay = 0$.
$S(H)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de plus $\dim S(H) = 1$.

Preuve

• Il suffit de montrer que $S(H)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$ (ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

$$S(H) = \{y : I \longmapsto \mathbb{K} \text{ dérivables } / y' + ay = 0\}$$

On a $S(H) \subset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$.
Soient $f, g \in S(H)$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Mq $\lambda f + \mu g \in S(H)$.

$$(\lambda f + \mu g)' + a(\lambda f + \mu g) = \lambda(\underbrace{f' + af}_{0}) + \mu(\underbrace{g' + ag}_{0}) = 0$$

$$\text{Donc} \qquad \lambda f + \mu g \in S(H)$$

• **Mq :** $\dim S(H) = 1$
d'après le théorème 1, on a : $S(H) = \{y : x \longmapsto ce^{-F(x)}\}$ où c une constante et F est une primitive de a sur I. Donc $S(H)$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \longmapsto ce^{-F(x)}$.

Exemples

1. (H1) : $y' + 5y = 0$

   Les solutions de (H1) sont les fonctions y définies par : $\begin{array}{rl} y : & \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ & x \longmapsto ce^{-\int 5dx} = ce^{-5x} \end{array}$

2. (H2) : $y' - 7x^2y = 0$

   La solution de (H2) est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = ce^{-\int -7x^2}$

$$y(x) = ce^{\frac{7}{3}x^3}$$

3. (H3) : $y' + \frac{1}{x^2}y = 0$

   La fonction $a(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pae définie en 0. On doit travailler sur les deux intervalles : $I_1 =]-\infty; 0[$ et $I_2 =]0; +\infty[$.
   - Sur $I_1 =]-\infty; 0[$: La solution générale est $y_1(x) = c_1e^{-\int \frac{1}{x^2}dx} = c_1e^{\frac{1}{x}}$
   - Sur $I_2 =]0;\ +\infty[$: La solution générale est $y_2(x) = c_2e^{\frac{1}{x}}$

1.3 Résolution de l'équation différentielle normalisée (L) : $y' + ay = b$

Considérons l'équation différentielle normalisée (L) : $y' + ay = b$, où $a, b : I \longmapsto \mathbb{K}$ continues et soit (H) l'équation homogène associée à (L) : (H) : $y' + ay = 0$.

Notons par : $S(H)$ l'ensemble des solutions de (H).
$S(L)$ l'ensemble des solutions de (L).

Nous avons le théorème suivant :

1.3.1 Théorème

On se donne une solution particulière $\psi \in S(L)$. Alors on a :

$$S(L) = \psi + S(H)$$

Preuve

- Soit $y \in S(L)$ **mq** $y \in (\psi + S(H))$

$(y - \psi)' + a(y - \psi) = (y' + ay) - (\psi' + a\psi) = b - b = 0$
d'où $(y - \psi) \in S(H)$ donc $y \in \psi + S(H)$

- Soit $y \in \psi + S(H)$ **mq** $y \in S(L)$

$$\begin{array}{rcl} y \in \psi + S(H) & \Longleftrightarrow & (y - \psi) \in S(H) \\ & \Longleftrightarrow & (y - \psi)' + a(y - \psi) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (y' + ay) - (\psi' + a\psi) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & y' + ay - b = 0 \\ & \Longleftrightarrow & y \in S(L) \end{array}$$

Remarque

Ce théorème montre que la solution générale de (L) s'obtient par la somme de la solution générale de (H) et une solution particulière de (L).

• Nous allons donner quelques équations différentielles pour lesquelles on arrive à trouver une solution particulière.

1.3.2 Corollaire 1

Soit $a \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n. Alors l'équation différentielle

$$\text{(L)} : \quad y' + ay = P(x)$$

admet comme solution particulière un polynôme ψ tq :

$$\begin{cases} \text{i)} & deg\psi = n+1 & \text{si } a = 0 \\ \text{ii)} & deg\psi = n & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

Preuve

i) Si $a = 0$:
l'équation différentielle devient (L) : $y' = P(x)$. Puisque P est de degré n alors il est clair qu'une solution particulière ψ de (L) serait de degré n+1.

ii) Si $a \neq 0$
Cherchons une solutionψ de (L) de degré n : $\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$.
L'équation (L) s'écrit pout ψ : $\forall x \in I$

$$\psi' + a\psi = b \iff$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \cdots + n\alpha_n x^{n-1} + a(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

$$\iff \begin{cases} a_0 &=& \alpha_1 + a\alpha_0 \\ a_1 &=& 2\alpha_2 + a\alpha_1 \\ \vdots & & \\ a_{n-1} &=& n\alpha_n + a\alpha_{n-1} \\ a_n &=& a\alpha_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_n &=& \frac{a_n}{a} & (a \neq 0) & existe \\ \alpha_{n-1} &=& \frac{a_{n-1} - n\alpha_n}{a} & (a \neq 0) & existe \\ \alpha_k &=& \frac{a_k - (k+1)\alpha_{k+1}}{a} & (a \neq 0) & existe \end{cases}$$

$$\text{Pour } k = n-1; n-2; \ldots; 1$$

d'où l'existance et l'unicité du polynôme ψ de degré n.

1.3.3 Corollaire 2

Soit $a \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n. Alors l'équation différentielle

$$\text{(L)} : y' + ay = P(x)e^{mx}$$

admet une solution particulière ψ de la forme $\psi(x) = q(x)e^{mx}$, où q est un polynôme tq :

$$\begin{cases} i) & deg \;\; q = n+1 & si \;\; m + a = 0 \\ ii) & deg \;\; q = n & si \;\; m + a \neq 0 \end{cases}$$

Preuve

Soit ψ une solution particulière de (L). Alors comme $e^{mx} \neq 0$, on peut écrire $\psi(x) = q(x)e^{mx}$, où q(x) est une fonction .

L'équation (L) s'écrit pour ψ : $q'(x)e^{mx} + memxq(x) + aq(x)e^{mx} = P(x)e^{mx}$
Soit $q'(x) + (m+a)q(x) = P(x)$ (L')
D'après le corollaire 1, q(x) serait un polynôme tq :

$$\begin{cases} deg \quad q = n+1 & si \quad m+a = 0 \\ deg \quad q = n & si \quad m+a \neq 0 \end{cases}$$

Exemple

- $y' + 2y = x^3 - 3x$

Equation homogène : $y' + 2y = 0$. Donc la solution générale est $y = ce^{-2x}$
Solution particulière de (L) : On a $a = 2 \ \neq 0$ et le second membre est un polynôme de degré 3.
Donc un solution particulière sera un polynôme de degré 3 : $\psi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$3ax^2 + 2bx + c + 2ax^2 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3 - 3x$

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{3}{4} \\ c &= -\frac{3}{4} \\ d &= \frac{3}{8} \end{cases} \qquad \psi(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$$

1.3.4 Méthode de la variation de la constante

Cette méthode permet d'avoir une solution particulière de (L) même dans le cas où a n'est pas un scalaire ou le second membre b n'est pas de la forme $P(x)$ ou $(x)e^{mx}$.

Principe de la méthode

Le principe de la méthode de la variation de la constante consiste à :

1. Chercher la solution générale de l'équation homogène (H) associée à (L), qui est de la forme $y(x) = ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de a sur l'intervalle I.
2. On cherche à déterminer une fonction $c(x)$, dérivable, tq la fonction $c(x)e^{-F(x)}$ soit une solution de (L). On se ramène alors à un calcul de primitive.

Exemples

1. (L) : $y' + 3x^2y = x^2$
   (H) l'équation homogène associée à (L) :$y' + 3x^2y = 0$ a pour solution générale : $y(x) = ce^{-x^3}$.
   On fait varier la constante en cherchant une solution de la forme $y(x) = c(x)e^{-x^3}$

$$c'(x)e^{-x^3} - 3x^2c(x)e^{-x^3} + 3x^2c(x)e^{-x^3} = x^2$$
$$\text{donc } c'(x)e^{-x^3} = x^2$$
$$c(x) = \int x^2e^{x^3}dx + K$$
$$c(x) = \frac{1}{3}e^{x^3} + K$$

   La solution de (L) s'écrit donc :

$$y(x) = (\frac{1}{3}e^{x^3} + K)e^{-x^3} = \frac{1}{3} + Ke^{x^3} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

2. (L) : $y' - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$

On a les fonctions : $x \to -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $x \to \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
Equation homogène : (H) :$y' - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y = 0$
La solution générale de (H) s'écrit : $y(x) = ce^{\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx}$ donc $y(x) = ce^{\sqrt{(1+x^2)}}$ $(c \in \mathbb{R})$
On fait varier la constante en posant $y(x) = c(x)e^{\sqrt{1+x^2}}$. On remplace dans (L) :

$$c'(x)e^{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}c(x)e^{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}c(x)e^{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$c'(x)e^{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$c(x) = \int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\sqrt{1+x^2}}dx + K$$

$$c(x) = -3e^{-\sqrt{1+x^2}} + K$$

La solution générale de (L) est définie sur (R) par :

$$y(x) = (-3e^{-\sqrt{1+x^2}} + K)e^{\sqrt{1+x^2}} = -3 + Ke^{\sqrt{1+x^2}}$$

1.4 Problème de Cauchy

1.4.1 Définition

On appelle problème de Cauchy relatif à l'équation différentielle (L) : $y' + ay = b$, tout système de la forme :

$$(C) \quad \begin{cases} y' + ay &= b \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Où $(x_0; y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
$y(x_0) = y_0$ est dite condition initiale du problème de Cauchy (C).

1.4.2 Théorème

Etant donnés $(x_0; y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy : (C) $\begin{cases} y' + ay &= b \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$ admet une solution **unique sur tout l'intervalle** I.

Preuve

L'équation homogène (H) : $y' + ay = 0$ admet une solution générale qui s'écrit $y(x) = ce^{-F(x)}$.
Où c est une constante et F la primitive de a sur I.
On fait varier la constante en posant : $y(x) = c(x)e^{-F(x)}$
On remplace dans (L) : $y' + ay = b$

$$y(x) = c'(x)e^{-F(x)} - a(x)c(x)e^{-F(x)} + a(x)c(x)e^{-F(x)} = b(x)$$

$$c'(x) = b(x)e^{F(x)}$$

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} b(u)e^{F(u)}du + K$$

Donc la solution générale de l'équation différentielle $y' + ay = b$ s'écrit

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} b(u)e^{F(u)}du + Ke^{-F(x)}$$

La condition initiale $y(x_0) = y_0$ s'écrit $Ke^{-F(x)} = y_0$. Donc $K = y_0e^{F(x)}$.
On a donc l'existance et l'unicité de la constante K. D'où l'existance et l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

1.4.3 Proposition : Principe de superposition des solutions

Soit l'équation différentielles linéaire : (L) : $y' + ay = b_1(x) + b_2(x)$
Si $y_1(x)$ est une solution de (L1) :$y' + ay = b_1(x)$
et Si $y_2(x)$ est une solution de (L2) :$y' + ay = b_2(x)$
Alors $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ est une solution de (L) : $y' + ay = b_1(x) + b_2(x)$

1.5 Résolution de l'équation non normalisée (L) : $\alpha y' + ay = b$

Considérons l'équation différentielle $\alpha y' + ay = b$, avec $\alpha, a, b : I \longmapsto \mathbb{K}$ continues.
Là où $\alpha(x)$ ne s'annule pas, l'équation différentielle (L) peut s'écrire : (L') : $y' + \frac{a}{\alpha}y = \frac{b}{\alpha}$
Donc pour résoudre (L), on commence tout d'abord par résoudre (L') là où elle ne s'annule pas puis on raccorde les solutions pour avoir une solution de (L) sur tout l'intervalle I.
Supposons par exemple que $I = \mathbb{R}$ et $\alpha(x)$ s'annule en x_0 $\;(i, e \;\; \alpha(x_0) = 0)$.

Alors posons : $I_1 =]-\infty; x_0[$ et $I_2 =]x_0; +\infty[$ et soient :
$y_1(x)$ la solution générale de (L') sur I_1.
$y_2(x)$ la solution générale de (L') sur I_2.
Pour que y_1 et y_2 se raccordent en une solution sur tout l'intervalle I, il faut que :

$$\lim_{x \to x_0^-} y_1(x) = \lim_{x \to x_0^+} y_2(x) = l$$

On définit alors une solution y continue sur I par :

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & si \quad x \in I_1 \\ y_2(x) & si \quad x \in I_2 \\ l & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

Il faut aussi que y soit dérivable en x_0.

Exemple

- $x^3y' - 2y = 0$

Les fonction $\alpha(x) = x^3$, $a(x) = -2$ et $b(x) = 0$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction $\alpha(x) = x^3$ s'annule en $x_0 = 0$. Posons alors $I_1 =]-\infty; 0[$ et $I_2 =]0; +\infty[$.
Sur $I_1 =]-\infty; 0[$, l'équation différentielle (H) s'écrit : $y' - \frac{2}{x^3}y = 0$. La solution générale s'écrit $y_1(x) = c_1e^{-\frac{1}{x^2}}$.
De même sur $I_2 =]0; +\infty[$, la solution générale s'écrit : $y_2(x) = c_2e^{-\frac{1}{x^2}}$.
<u>**Raccords en 0**</u> :

- <u>Continuité en 0</u> :

$$\lim_{x \to 0^-} y_1(x) = \lim_{x \to 0^-} c_1e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} y_2(x) = \lim_{x \to 0^+} c_2e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

On définit alors des solutions y continues sur $\mathbb{R}$ par :

$$y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \in I_1 =]-\infty; 0[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ c_2 e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \in I_2 =]0; +\infty[\end{cases} \qquad (1)$$

- Dérivabilité en 0 :

$$\left(\lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = l'\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{c_1 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

De même

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{c_2 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

D'où on déduit que les solutions de (H) sont toutes celles définies par (1).

2 Equations différentielles linéaires du second ordre

2.1 Généralités

2.1.1 Définition 1

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre toute équation de la forme :

$$\text{(E)} : \quad \alpha y'' + ay' + by = c$$

Où α, a, b et c sont des fonctions continues d'un intervalle I vers un corps $\mathbb{K}$. Notre étude se limitera ici au cas où α, a et b sont constants. ($\alpha \neq 0$)

2.1.2 Définition 2

Une fonction $\begin{array}{rl} y : & I \longmapsto \mathbb{K} \\ & x \longmapsto y(x) \end{array}$ sera dite solution de (E) si et seulement si :
i)y est deux fois dérivable sur I.
ii)$\forall x \in I$; $\alpha y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$

2.1.3 Définition 3

Dans le cas où $\alpha = 1$, l'équation devient : (L) : $y'' + ay' + by = c$ qui est dite équation normalisée.
L'équation homogène associée à (L) est : (H) : $y'' + ay' + by = 0$

2.2 Résolution de l'équation homogène

Considérons l'équation homogène (H) : $y'' + ay' + by = 0$ et soit $S_K(H)$ l'ensemble des solutions de (H).

2.2.1 Théorème

$S_K(H)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Preuve

Il suffit de montrer que $S_K(H)$ est un sev de $\mathcal{D}^2(I,\mathbb{K})$ (Ensemble des fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$).

A Solution complexe de (H)

A. 1 Théorème

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ alors $\dim S_{\mathbb{C}}(\mathrm{H})=2$.

Preuve

Commençons par chercher une solution de (H) de la forme : $\varphi(x)=e^{\alpha x}$. (H) s'écrit alors : $e^{rx}(r^2+ar+b)=0$.
Soit : $r^2+ar+b=0$ (E). (E) est dite équation caractéristique.
Soit α une solution de (E). (α existe car on est dans $\mathbb{C}$). Donc $e^{\alpha x}$ est une solution de (H).
Comme $e^{\alpha x}\neq 0 \quad \forall x\in I$, on peut écrire y sous la forme :

$$y(x)=g(x)e^{\alpha x}$$

$$y'(x)=(g'(x)+\alpha g(x))e^{\alpha x}$$
$$y''(x)=(g''(x)+2\alpha g'(x)+\alpha^2 g(x))e^{\alpha x}$$

On remplace dans (H) :

$$(g''+2\alpha g'+\alpha^2 g)e^{\alpha x}+a(g'+\alpha g)e^{\alpha x}+bge^{\alpha x}=0$$

$$g''+(a+2\alpha)g'+\underbrace{(\alpha^2+a\alpha+b)}_{=0\text{ (car }\alpha\text{ est solution de (E))}}g=0$$

$$g''+(a+2\alpha)g'=0$$

- Si $\Delta=0$

Alors α sera ($\alpha=-\frac{a}{2}$), une solution double de (E). Et on a $\alpha=-\frac{a}{2}$ donc $2\alpha+a=0$.
On aura alors $g''(x)=0$ d'où $g'(x)=c_1$ alors $g(x)=c_1x+c_2$.

$$\text{d'où}\quad y(x)=(c_1x+c_2)e^{\alpha x}$$

$$S_{\mathbb{C}}(H)=\left\{\begin{array}{rccl} y: & I & \longmapsto & \mathbb{C}\\ & x & \longmapsto & (c_1x+c_2)e^{\alpha x}\end{array}\right\}$$

$S_{\mathbb{C}}(H)$ est engendré par la famille $(xe^{\alpha x};\ e^{\alpha x})$.

Mq $(xe^{\alpha x};\ e^{\alpha x})$ est libre.

$$\forall x\in I;\quad \lambda xe^{\alpha x}+\mu e^{\alpha x}=0;\quad \lambda x+\mu=0$$

$\Rightarrow \lambda=\mu=0$ car $(1;x)$ est une base de $\mathcal{P}_1$.
Donc $\dim S_{\mathbb{C}}(H)=2 \quad$ (base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{C})$).

$\circ$ Si $\Delta \neq 0$
Alors (E) admet deux solutions distincts : α et β, tq : $\alpha + \beta = -a$.

$$g'' + (a + 2\alpha)g' = 0 \quad \text{donc} \quad g'(x) = c_1 e^{-(a+2\alpha)x} \quad \text{d'où} \quad g(x) = -\frac{c_1}{2\alpha + a} e^{-(a+2\alpha)x} + c_2$$

$$\text{Donc} \quad y(x) = (-\frac{c_1}{2\alpha + a} e^{-(a+2\alpha)x} + c_2) e^{\alpha x} = -\frac{c_1}{2\alpha + a} e^{(-a-2\alpha)x} + c_2 e^{\alpha x}$$

$$y(x) = \frac{c_1}{\beta - \alpha} e^{\beta x} + c_2 e^{\alpha x}$$

$$S_{\mathbb{C}}(H) = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & I & \longmapsto & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \end{array} \right\}$$

Mq $(e^{\alpha x};\ e^{\beta x})$ est libre.

$$\forall x \in I \left\{ \begin{array}{lcll} \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} & = & 0 & (1) \\ \lambda \alpha e^{\alpha x} + \mu \beta e^{\beta x} & = & 0 & (2) \end{array} \right.$$

$\beta \times (1) - (2)$ donne $\lambda(\beta - \alpha) e^{\alpha x} = 0$
$\Rightarrow$ $\lambda = 0$ et donc $\mu = 0$ donc $\dim S_{\mathbb{C}}(H) = 2$
Et on déduit le théorème suivant :

A. 2 Théorème

On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Soit l'équation caractéristique (E) : $r^2 + ar + b = 0$, $\Delta = a^2 - 4b$ son descriminant.

$\circ$ Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution double $\alpha = -\frac{a}{2}$, et l'ensemble des solutions de (H) est :

$$S_{\mathbb{C}}(H) = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & I & \longmapsto & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (c_1 x + c_2) e^{\alpha x} \end{array} \right\} (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{C})$$

$\circ$ Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux solutions distincts α et β. Et on a :

$$S_{\mathbb{C}}(H) = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & I & \longmapsto & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \end{array} \right\} (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{C})$$

B Solution réelle de (H)

Considérons l'équation différentielle homogène (H) : $y'' + ay' + by = 0$, où a et b sont maintenant des réels.
Le théorème suivant donne les solutions réelles de (H).

B. 1 Théorème

Soit (E) : $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique et $\Delta = a^2 - 4b$.

○ Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles distincts α et β. Et on a :

$$S_{\mathbb{R}}(H) = \left\{ \begin{array}{cccc} y: & I & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \end{array} \right\} (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{R})$$

○ Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution réelle double $\alpha = -\frac{a}{2}$. Et on a :

$$S_{\mathbb{R}}(H) = \left\{ \begin{array}{cccc} y: & I & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (c_1 x + c_2) e^{\alpha x} \end{array} \right\} (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{R})$$

○ Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées : $\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha & = & r + is \\ \beta & = & r - is \end{array} \right.$

Et on a :

$$S_{\mathbb{R}}(H) = \left\{ \begin{array}{cccc} y: & I & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\lambda \cos(sx) + \mu \sin(sx)) e^{rx} \end{array} \right\}$$

B. 2 Exemples

Trouver les solutions complexes et réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (L_1)$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (L_2)$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0 \quad (L_3)$

1. $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (L_1)$

   L'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$. $\Delta = 0$ donc (E) admet une solution double $\alpha = 2$. Donc les solutions complexes de (L_1) sont :

$$\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (c_1 x + c_2) e^{2x} \end{array} \qquad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{C})$$

   Les solutions réelles de (L_1) sont :

$$\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (c_1 x + c_2) e^{2x} \end{array} \qquad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{R})$$

2. $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (L_2)$

   L'équation caractéristique : $r^2 + 3r + 2 = 0$. $\Delta = 1 > 0$ donc $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$. Donc les solutions complexes de (L_2) sont :

$$\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \end{array} \qquad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{C})$$

Et les solutions réelles sont :

$$\begin{array}{rcl} y: \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \end{array} \qquad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{R})$$

3. $y'' + 2y' + 4y = 0 \quad (L_3)$

   L'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 4 = 0$. $\Delta = -12 < 0 = (i2\sqrt{3})^2$ donc $\alpha = -1 + i\sqrt{3}$ et $\beta = -1 - i\sqrt{3}$.
   Les solutions complexes sont :

$$\begin{array}{rcl} y: \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & c_1 e^{(-1+i\sqrt{3})x} + c_2 e^{(-1-i\sqrt{3})x} \end{array} \qquad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathbb{C})$$

   Les solutions réelles sont :

$$\begin{array}{rcl} y: \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda \cos(\sqrt{3}x) + \mu \sin(\sqrt{3}x))e^{-x} \end{array} \qquad (\lambda \text{ et } \mu \text{ dans } \mathbb{R})$$

2.3 Résolution de l'équation normalisée : (L) :$y'' + ay' + by = c(x)$ (c continue de I dans $\mathbb{K}$)

Soient $\begin{array}{l} S(\text{L}) \text{ l'ensemble des solutions de (L)} \\ S(\text{H}) \text{ l'ensemble des solutions de (H)} \end{array}$. On a le théorème suivant :

2.3.1 Théorème

On se donne $\psi \in S(L)$. On a : $S(L) = \psi + S(H)$.

Preuve Facile.

Remarque Ce théorème exprime le fait que la solution générale de (L) s'obtient par la somme générale de (H) et une solution particulière de (L). Là aussi nous allons donner quelques équations pour lesquels on arrive à trouver une solution particulière ψ.

A Le second membre est un polynôme

A. 1 Proposition

Soit p un polynôme de degré n. Alors l'équation différentielle (L) :$y'' + ay' + by = p(x)$ admet comme solution particulière un polynôme $\psi(x)$ tq :

$$\begin{array}{rrcll} i) & \deg \psi & = & n & \text{si} \quad b \neq 0 \\ ii) & \deg \psi & = & n+1 & \text{si} \quad b = 0 \quad \text{et} \quad a \neq 0 \\ iii) & \deg \psi & = & n+2 & \text{si} \quad a = b = 0 \end{array}$$

Preuve

i) si $\quad b \neq 0$

On pose $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, et on cherche $\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_0 x + \cdots + \alpha_n x^n$.

On remplace dans (L) et on montre facilement l'éxistance des $(\alpha_i(i = 0, 1, \dots, n))$

ii) si $b = 0$ et $a \neq 0$

(L) s'écrit $y'' + ay' = p(x)$. On pose $u = y'$, on aura : (L') $u' + au = p(x)$.
Une solution particulière de (L') est un polynôme de degré n. (voir les solutions particulières d'équations différentielles du premier ordre).
Et comme $u = y'$, alors y serait de degré $n + 1$.

iii) si $a = b = 0$

(L) s'écrit $y'' = p(x)$. Donc comme $\deg p = n$, alors $\deg y = n + 2$

B Le second membre est de la forme $e^{kx}p(x)$

B. 1 Proposition

Considérons l'équation différentielle (L) : $y'' + ay' = e^{kx}p(x)$, avec $k \in \mathbb{K}$ et $\deg p = n$ et (E) : $r^2 + ar + b = 0$ (l'équation caractéristique).
Alors une solution particulière de (L) a la forme : $\psi(x) = e^{kx}Q(x)$, avec Q est un polynôme tq :

$$\begin{array}{rrcll} i) & \deg Q & = & n & \text{si } k \text{ n'est pas une racine de (E).} \\ ii) & \deg Q & = & n+1 & \text{si } k \text{ est une racine simple de (E).} \\ iii) & \deg Q & = & n+2 & \text{si } k \text{ est une racine double de (E).} \end{array}$$

Preuve

Cherchons une solution particulière $\psi(x)$ de la forme $\psi(x) = e^{kx}Q(x)$

$$\psi'(x) = (kQ(x) + Q'(x))e^{kx}$$

$$\psi''(x) = (Q''(x) + 2kQ'(x) + k^2Q(x))e^{kx}$$

On remplace dans (L) :

$$(Q''(x) + 2kQ'(x) + k^2Q(x))e^{kx} + (akQ(x) + aQ'(x))e^{kx} + be^{kx}Q(x) = e^{kx}p(x)$$

$$Q''(x) + (2k + a)Q'(x) + (k^2 + ak + b)Q(x) = p(x)$$

On déduit d'après la proposition précédente que Q est un polynôme tel que :

i) si $k^2 + ak + b \neq 0$ (i,e k n'est pas une racine de (E))
Alors $\deg Q = n$.

ii) si $k^2 + ak + b = 0$ et $2k + a \neq 0$ (i,e k est une racine simple de (E)).
Alors $\deg Q = n + 1$.

iii) si $k^2 + ak + b = 0$ et $2k + a = 0$ (i,e k est une racine double de (E))
Alors $\deg Q = n + 2$.

B. 2 Exemples

1. (L) : $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$

   Equation homogène (H) : $y'' - 3y' + 2y = 0$, équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
   $\Delta = 1$ donc $r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.
   La solution générale de (H) est : $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$
   Solution particulière :
   Le second membre est un polynôme p(x) de degré 2. et comme $b = 2 \neq 0$, alors une solution particulière ψ est un polynôme tq $\deg \psi = 2$

   $$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

   (L) s'écrit :

   $$2a_2 - 3a_1 - 6a_2 x + 2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = x^2 - 1$$

   $$2a_2 - 3a_1 + 2a_0 + (-6a_2 + 2a_1)x + 2a_2 x^2 = x^2 - 1$$

   $$\iff \left\{ \begin{array}{rcr} 2a_2 - 3a_1 + 2a_0 & = & -1 \\ -6a_2 + 2a_1 & = & 0 \\ 2a_2 & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & \frac{5}{4} \\ a_1 & = & \frac{3}{2} \\ a_2 & = & \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

   $$\text{Donc} \qquad \psi(x) = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

   Donc la solution générale de (L) est :

   $$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{5}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

2. (L) : $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^{2x}$

   Equation homogène (H) : $y'' - 4y' + 4y = 0$, équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$.
   $\Delta = 0$ donc $r_1 = \frac{4}{2} = 2$.
   La solution générale de (H) est : $y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x}$
   Solution particulière :
   Une solution particulière de (L) est de la forme $\psi(x) = e^{2x}Q(x)$. On a $k = 2$ est une racine double de (E) de degré $\deg Q = 5$.

   $$\psi'(x) = (2Q(x) + Q'(x))e^{2x}$$

   $$\psi''(x) = (2Q'(x) + Q''(x) + 4Q(x) + 2Q'(x))e^{2x} = (Q''(x) + 4Q'(x) + 4Q(x))e^{2x}$$

   On remplace dans (L) :

   $$(Q''(x) + 4Q'(x) + 4Q(x) - 8Q(x) - 4Q'(x) + 4Q(x))e^{2x} = e^{2x}(x^3 + x)e^{2x}$$

   $$Q''(x) = x^3 + x$$

   $$Q'(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \lambda$$

   $$Q(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6} + \lambda x + \mu$$

$$\text{Donc} \qquad \psi(x) = (\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6} + \lambda x + \mu)e^{2x}$$

Comme on recherche une solution particulière, on prend $\lambda = \mu = 0$ donc $\psi(x) = (\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6})e^{2x}$

$$\text{Donc} \qquad y(x) = (\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2)e^{2x}$$

C Le second membre est de la forme $A(x)\cos(kx) + B(x)\sin(kx)$

Considérons l'équation différentielle (L) : $y'' + ay' + by = A(x)\cos kx + B(x)\sin kx$, avec a, b et $k \in \mathbb{R}$, $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes réels.
On cherche seulement les solutions réelles.

Proposition

Soit(E) : $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique. L'équation différentielle (L) admet une solution particulière de la forme

$$\psi(x) = U(x)\cos(kx) + V(x)\sin(kx)$$

où U et V sont des polynômes réelles tq :

$$\begin{array}{rrcll} i) & \sup(\deg U;\ \deg V) & = & \sup(\deg A;\ \deg B) & \text{si } ik \text{ n'est pas une racine de (E)} \\ ii) & \sup(\deg U;\ \deg V) & = & 1 + \sup(\deg A;\ \deg B) & \text{si } ik \text{ est une racine de (E).} \end{array}$$

Preuve

On utilise la formule d'Euler :

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad ; \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= A(x)(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}) + B(x)(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}) \\ &= (\frac{A(x)}{2} - i\frac{B(x)}{2})e^{ikx} + (\frac{A(x)}{2} + i\frac{B(x)}{2})e^{-ikx} \end{aligned}$$

Pour chercher une solution particulière de (L), il suffit de chercher une solution particulière ψ_1 de (L1) :

$$y'' + ay' + by = (\frac{A(x)}{2} - i\frac{B(x)}{2})e^{ikx}$$

et une solution particulière ψ_2 de (L2) :

$$y'' + ay' + by = (\frac{A(x)}{2} + i\frac{B(x)}{2})e^{-ikx}$$

Donc $\psi = \psi_1 + \psi_2$.
Une solution particulière de (L1) a la forme : $\psi_1(x) = Q(x)e^{ikx}$, avec :

1^{er} cas : Si ik n'est pas une racine de (E) alors

$$\deg Q = \deg(\frac{A - iB}{2}) = \sup(\deg A;\ \deg B)$$

Puisque $(\frac{A+iB}{2})e^{-ikx}$ est le conjugué de $(\frac{A-iB}{2})e^{ikx}$, et a et $b \in \mathbb{R}$, alors une solution particulière de (L2) serait $\psi_2(x) = \overline{\psi_1(x)}$.
Donc une solution particulière de (L) est :

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) & = & \overline{\psi_1(x)} + \psi_1(x) \\ & = & 2\Re(\psi_1(x)) \\ & = & 2\Re(\Re(Q) + i\Im(Q))(\cos(kx) + i\sin(kx)) \\ & = & \underbrace{2\Re(Q)}_{U(x)}\cos(kx) \underbrace{-2\Im(Q)}_{V(x)}\sin(kx) \end{array}$$

On voit bien que $U(x)$ et $V(x)$ sont des polynômes réels, de plus on a :

$$\sup(\deg U;\ \deg V) = \deg Q = \sup(\deg A;\ \deg B)$$

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : Si ik est une racine de (E) alors

$$\deg Q = 1 + \deg(\frac{A - iB}{2}) = 1 + \sup(\deg A;\ \deg B)$$

Le même raisonnement que dans le premier cas peut s'effectuer.

D Le second membre est de la forme $(A(x)\cos(kx) + B(x)\sin(kx))e^{mx}$

D. 1 Proposition

Considérons l'équation différentielle (L) :

$$y'' + ay' + by = (A(x)\cos(kx) + B(x)\sin(kx))e^{mx}$$

Avec a, b et $k \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{K}$. A et B sont réels. On cherche les solutions réelles.
En posant $y(x) = z(x)e^{mx}$, on se ramène à une équation différentielle du second ordre avec comme second membre $A(x)\cos(kx) + B(x)\sin(kx)$.

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & z(x)e^{mx} \\ y'(x) & = & (z'(x) + mz(x))e^{mx} \\ y''(x) & = & (z''(x) + 2mz'(x) + m^2z(x))e^{mx} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} z''(x) + 2mz'(x) + m^2z(x) + a(z'(x) + mz(x)) + bz(x) & = & A(x)\cos(kx) + B(x)\sin(kx) \\ z''(x) + (2m + a)z'(x) + (m^2 + am + b)z(x) & = & A(x)\cos(kx) + B(x)\sin(kx) \end{array}$$

D. 2 Exemple

Trouver les solutions réelles de (L) : $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin(x)$

Equation homogène (H) : $y'' - 2y' + 2y = 0$. Equation caractéristique (E) : $r^2 - 2r + 2 = 0$, avec $\Delta = -4 = (2i)^2$ donc $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$.
Solution générale réelle de (H) :

$$y(x) = (\lambda\cos x + \mu\sin x)e^x$$

Solution particulière : posons $y(x) = z(x)e^x$

$$y'(x) = (z' + z)e^x$$

$$y''(x) = (z'' + 2z' + z)e^x$$

$$z'' + 2z' + z - 2(z' + z) + 2z = \sin x$$

$$\text{(L')} \qquad z'' + z = \sin x = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$$

avec $A(x) = 0$ et $B(x) = 1$ et $\sup(\deg A;\ \deg B) = 0$.
Comme i est une solution de l'équation caractéristique (E') : $r^2 + 1 = 0$, alors une solution particulière de (L') est :

$$\psi(x) = U(x)\cos(x) + V(x)\sin(x)$$

avec $\quad \sup(\deg U;\ \deg V) = 1 + \sup(\deg A;\ \deg B) = 1$.
Ecrivons alors

$$\psi(x) = (ax + b)\cos x + (a'x + b')\sin x$$

$$\psi'(x) = a\cos x - (ax + b)\sin x + a'\sin x + (a'x + b')\cos x$$

$$\psi''(x) = -a\sin x - a\sin x - (ax + b)\cos x + a'\cos x + a'\cos x - (a'x + b')sinx$$

$$\text{(L')} \quad \Longleftrightarrow \quad -2a\sin x + 2a'\cos x = \sin x$$

Donc $a' = 0$, $a = -\frac{1}{2}$, b et b' quelconques.
Comme on cherche une solution particulière, $b = b' = 0$. Donc une solution particulière de (L) est :

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}x\cos x e^x$$

D'où la solution générale de (L) est :

$$y(x) = (-\frac{1}{2}x\cos x + (\lambda\cos x + \mu\sin x))e^x$$

2.4 Résolution de (L) : $y'' + ay' + by = c(x)$ avec c fonction quelconque

A Méthode de la variation des constantes

A. 1 Propriété

Soit $(\varphi(x); \psi(x))$ une base de $S_{\mathbb{K}}(H)$. On appelle Wronskien de $(\varphi\,;\,\psi)$ le determinant :

$$W_{(\varphi;\ \psi)}(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}$$

Et on a $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ W_{(\varphi;\ \psi)}(x) \neq 0$.

Preuve

Que l'on soit dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, trois cas sont à envisager :

<u>1^{er} cas</u> : $\qquad \varphi(x) = e^{\alpha x}$, $\psi(x) = e^{\beta x}$.

$$W_{(\varphi;\ \psi)}(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x}(x) \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)e^{(\alpha+\beta)x} \neq 0 \quad (\text{car } \alpha \neq \beta).$$

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $\qquad \varphi(x) = e^{\alpha x}$, $\psi(x) = xe^{\alpha x}$.

$$W_{(\varphi;\ \psi)}(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x}(x) \\ \alpha e^{\alpha x} & (1 + \alpha x)e^{\alpha x} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \neq 0.$$

<u>$3^{\text{ème}}$ cas</u> : $\qquad \varphi(x) = \cos(sx)e^{rx}$, $\psi(x) = \sin(sx)e^{rx}$.

$$W_{(\varphi;\ \psi)}(x) = \begin{vmatrix} \cos(sx)e^{rx} & (-s\sin(sx) + r\cos(sx))e^{rx} \\ \sin(sx)e^{rx} & (s\cos(sx) + r\sin(sx))e^{rx} \end{vmatrix} = se^{2rx} \neq 0.$$

$s \neq 0$ (On est dans le cas où (E)admet deux solutions complexes conjuguées).

A. 2 Proposition

Soit $(\varphi(x); \psi(x))$ une base de $S_{\mathbb{K}}(H)$. On fait varier les constantes en cherchant une solution particulière g de (L) vérifiant :

$$\begin{cases} g(x) = \lambda(x)\varphi(x) + \mu(x)\psi(x) & (1) \\ g'(x) = \lambda(x)\varphi'(x) + \mu(x)\psi'(x) & (2) \end{cases}$$

Et g serait solution de (L) si et seulement si $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ vérifient :

$$\begin{cases} \lambda'(x)\varphi(x) + \mu'(x)\psi(x) = 0 & (3) \\ \lambda'(x)\varphi'(x) + \mu'(x)\psi'(x) = c(x) & (4) \end{cases}$$

Preuve

$\Rightarrow$) Soit g une solution de (L) vérifiant (1) et (2). Montrons que g vérifie (3) et (4). On a

$$g(x) = \lambda(x)\varphi(x) + \mu(x)\psi(x)$$

$$g'(x) = \lambda'(x)\varphi(x) + \lambda(x)\varphi'(x) + \mu'(x)\psi(x) + \mu(x)\psi'(x)$$

Si l'on utilise (2), il reste :

$$\lambda'(x)\varphi(x) + \mu'(x)\psi(x) = 0 \qquad (3)$$

De plus, y est une solution de (L). Donc $g'' + ag' + bg = c(x)$

$$(2) \;\Rightarrow\; \lambda'\varphi' + \lambda\varphi'' + \mu'\varphi' + \mu'\psi'' + a(\lambda\varphi' + \mu\psi') + b(\lambda\varphi + \mu\psi) = c(x)$$

$$\lambda'\varphi' + \mu'\psi' + \lambda(\underbrace{\varphi'' + a\varphi' + b\varphi}_{0}) + \mu(\underbrace{\psi'' + a\psi' + b\psi}_{0}) = c(x) = 0$$

Il reste $\lambda'\varphi' + \mu'\psi' = c(x) \qquad (4)$.

$\Leftarrow$) Soit g une fonction donnée par (1) et vérifiant (3) et (4). Montrons que g est une solution de (L) vérifiant (2).
On a $g = \lambda\varphi + \mu\psi$, donc $g' = \lambda'\varphi + \lambda\varphi' + \mu'\psi$. Si on utilise (3), on obtient $g' = \lambda\varphi' + \mu\psi'$ (2).
De plus g est une solution de (L), en effet :

$$\begin{aligned} g'' + ag' + bg &= \lambda'\varphi' + \lambda\varphi'' + \mu'\psi' + \mu\psi'' + a(\lambda\varphi' + \mu\psi') + b(\lambda\varphi + \mu\psi) \\ &= \lambda'\varphi' + \mu'\psi' + \lambda(\underbrace{\varphi'' + a\varphi' + b\varphi}_{0}) + \mu(\underbrace{\psi'' + a\psi' + b\psi}_{0}) \\ &= c(x) \quad \text{d'après (4).} \end{aligned}$$

A. 3 Exemple

Intégrer l'équation différentielle (L) :

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x} \quad \text{sur} \quad]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$$

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$ donc $\Delta = -4 = (2i)^2$
Solution générale : $y(x) = (A\cos x + B\sin x)e^x$

Soit $(\varphi(x); \psi(x))$ une base de $S_{\mathbb{K}}(H)$, avec $\begin{cases} \varphi(x) & = & \cos(x)e^x \\ \psi(x) & = & \sin(x)e^x \end{cases}$. On fait varier les constantes en cherchant une solution particulière g de (L) vérifiant :

$$\begin{cases} g(x) & = & (\lambda(x)\cos(x) \ + \mu(x)\sin(x))e^x \\ g'(x) & = & \lambda(x)(-\sin(x) + \cos(x))e^x + \mu(x)(\cos(x) + \sin(x))e^x \end{cases}$$

$\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} (\lambda'(x)\cos(x) \ + \mu'(x)\sin(x))e^x & = & 0 \\ \lambda'(x)(-\sin(x) + \cos(x)) + \mu'(x)(\cos(x) + \sin(x)) & = & \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) + \cos(x) & \cos(x) + \sin(x) \end{vmatrix} = 1.$$

$$\Delta_{\lambda'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \frac{1}{\cos(x)} & \cos(x) + \sin(x) \end{vmatrix} = -\tan(x).$$

$$\lambda' = -\tan(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\lambda = \ln|\cos(x)| + c_1 = \ln(\cos(x)) + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

La solution générale de (L) :

$$y(x) = (\ln(\cos x) + c_1)\cos x e^x + (x + c_2)\sin x e^x$$

A. 4 Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy associé à l'équation différentielle

$$\text{(L)} : \quad y'' + ay' + by = c(x)$$

tout système de la forme :

$$(C) : \begin{cases} y'' + ay' + by & = & c(x) \\ y(x_0) & = & \alpha \\ y'(x_0) & = & \beta \end{cases} \quad (x_0;\ \alpha;\ \beta) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}.$$

A. 5 Théorème

Le problème de Cauchy (C) admet une solution unique y définie sur l'intervalle I.

Preuve (Faite oralement)

B Méthode ramenant à une équation du 1^{er} ordre

B. 1 Proposition

Soit l'équation différentielle (L) : $y'' + ay' + by = c(x)$. Supposons que l'on connaît une solution $\varphi(x)$ de (H) **ne s'annulant pas sur** I, alors en faisant le changement d'inconnu $y(x) = z(x)\varphi(x)$, on se ramène à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

B. 2 Exemple

Soit l'équation différentielle (L) :

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$$

Sur $]-1; +\infty[$
a) Montrons que $\varphi(x) = e^x$ est une solution de l'équation homogène (H) associée à (L).
b)Résoudre l'équation (L).
a)On a :

$$(1+x)e^x - 2e^x + (1-x)e^x = 0$$

donc $\varphi(x) = e^x$ est bien solution de (H).
b)On pose $y(x) = z(x)e^x$. Donc $y'(x) = (z'(x) + z(x))e^x$, et $y''(x) = (z''(x) + 2z'(x) + z(x))e^x$.
On remplace dans (L) :

$$[(1+x)(z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + (1-x)z]e^x = xe^{-x}$$

$$[(1+x)z'' + (2 + 2x - 2)z']e^x = xe^{-x}$$

$$(1+x)z'' + 2xz' = xe^{-2x}$$

On pose $z'(x) = u(x)$. On aura :

$$(1+x)u'(x) + 2xu(x) = xe^{-2x}$$

Equation homogène :

$$u'(x) + \frac{2x}{1+x}u(x) = 0$$

Solution générale :

$$u(x) = ce^{-\int \frac{2x}{1+x}dx} = ce^{-2x+\ln|1+x|} = c(1+x)^2e^{-2x}$$

Variation de la constante : $y(x) = c(x)(1+x)^2e^{-2x}$. Remplaçons :

$$c'(x)(1+x)^2e^{-2x} = \frac{xe^{-2x}}{1+x}$$

$$c'(x) = \frac{x}{(1+x)^3}$$

$$\frac{x}{(1+x)^3} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{(1+x)^3}$$

On multiplie par $(1+x)^3$, et on fait $x = -1 \Rightarrow C = -1$
On multiplie par $(1+x)$, et on fait tendre x $\to \infty \Rightarrow A = 0$
On remplace x par 0, on aura $0 = B - 1 \Rightarrow B = 1$

$$c(x) = \int (\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3})dx + K = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + K$$

donc

$$u(x) = (-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + K)(1+x)^2e^{-2x} = -(1+x)e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + K(1+x)^2e^{-2x}$$

On a $z'(x) = u(x)$. Donc :

$$z(x) = \int (-(1+x)e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + K(1+x)^2e^{-2x})dx + K_2$$

3 Equations à variables séparables

3.1 Définition

On appelle équation à variables séparables toute équation différentielle de la forme

$$\text{(S)} : \quad y' = a(x)b(y)$$

Où a et b sont deux fonctions continues sur les intervalles I_1 et I_2. De plus b ne s'annule pas sur l'intervalle I_2.

3.2 Méthode de résolution

On écrit : $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$, donc $\frac{dy}{b(y)} = a(x)dx$. En intégrant, on aura :

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)dx + K$$

3.3 Application aux équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

Considérons l'équation différentielle (L) : $y' = a(x)y$. Supposons que y n'est pas la fonction nulle. Dans ce cas y ne s'annule pas sur I (d'après le théorème d'unicité de Cauchy). (L) s'écrit :

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx$$

En intégrant on obtient :

$$\ln|y(x)| = \int a(x)dx + K$$

$$|y(x)| = e^{a(x)dx}e^K$$

$$y(x) = \varepsilon(x)e^K e^{a(x)dx} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = \pm 1$$

Or y est une fonction continue qui ne s'annule pas sur I. D'après le théorème des valeurs intermediaires, y ne change pas de signe donc $\varepsilon(x) = \varepsilon = 1$ ou bien -1.Donc :

$$y(x) = ce^{\int a(x)dx} \quad \text{avec} \quad c = \varepsilon e^K \quad \square$$

FICHE : DÉRIVÉES ET PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

Dans tout le formulaire, les quantitées situées au dénominateur sont supposées non nulles

Dérivées des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Opérations et dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$,λ désignant une constante

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\boxed{(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2)$

$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}} \quad (n \in N, \ n \geqslant 1)$

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

En particulier,si $u > 0$: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\boxed{(u^a)' = \alpha u' u^{a-1}}$

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est **une** primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont **uniques à une constante près** notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	$\lambda x + C$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \ln x - x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.$(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
- Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I.)
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

En particulier, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\boxed{\int u'u^a = \begin{cases} \frac{1}{a+1} u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u + C & \text{si } a = -1 \end{cases}}$$

ENSA Al Hoceima, AP1,
Analyse II, 2018-2019
TD1 : Equations Différentielles Linéaires

Exercice 1 :

1. Déterminer une équation différentielle homogène, du premier ordre à coefficients constants réels telle que la fonction $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ soit solution.
2. Déterminer une équation différentielle homogène, du second ordre à coefficients constants réels telle que la fonction xe^{3x} soit solution.
3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (L1) &\quad : \quad y' + 3x^2y = x^2 \\ (L2) &\quad : \quad x^2y' + xy = 1 \\ (L3) &\quad : \quad |1-x|y' + xy = x \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (L1) &\quad : \quad (1+x)^2y' + 2xy = x + e^x \\ (L2) &\quad : \quad y'' + y - 2y = 9e^x - 2 \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} (L1) &\quad : \quad y'' - 3y + 2y = e^x \\ (L2) &\quad : \quad y'' + y - 2y = xe^{-2x} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

On considère l'équation différentielle

$$(L) : y'' + y' - 2y = 2x + 1$$

1. Déterminer la solution générale de cette équation.
2. Déterminer l'unique solution y telle que $y(0) = 0$

Exercice 5 : On considère l'équation

$$(L) : y'' + 2y' + 4y = xe^x$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (L).
2. Trouver une solution particulière de (L), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (L).
3. Déterminer l'unique solution y de (L) vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.

Exercice 6

1. Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ des équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} (L1) \quad &: \quad \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1 \\ (L2) \quad &: \quad y'' - 2y + y = e^x \ln(x) \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(L) : y'' - 2y' + y = \cos(x)$$

3. Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(L) : (1+x)y'' - 2y\prime + (1-x)y = xe^{-x}$$